Chapitre 5 : Vecteurs propres et valeurs propres

Exemple

Définition 50 (vecteur propre)**.**
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A si $v \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

On appelle λ la *valeur propre* associée à v.

Exemple Trouvons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ pour $A =$

Généralisation à $\mathbb{R}^n$
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Déterminons les valeurs propres et les vecteurs propres associés :

Définition 51 (espace propre)**.**
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Alors *l'espace propre* E_λ associé à la valeur propre λ est défini par

Théorème 46. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si et seulement si*

Définition 52 (équation et polynôme caractéristique)**.**
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. L'équation $\det(A - \lambda I_n) = 0$ s'appelle *l'équation caractéristique* de A. On pose

Remarque

Théorème 47. *Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.*

Définition 53 (multiplicité algébrique)**.**
On appelle la *multiplicité algébrique* d'une valeur propre sa multiplicité en tant que racine de $p_A(\lambda)$.

Exemples

Définition 54.
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle la *trace* de A le nombre

Cas particuliers

Remarques

Exemples

Théorème 48. *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une matrice avec* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *des valeurs propres distinctes* ($r \leq n$)*. Alors si* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ *sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$*, la famille* $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ *est linéairement indépendante.*

Cas particulier de $\lambda = 0$

Théorème 49. *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une matrice. Alors* $\lambda = 0$ *est une valeur propre de* A *si et seulement si* A *est singulière.*

En particulier, A est inversible si et seulement si $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A.